Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

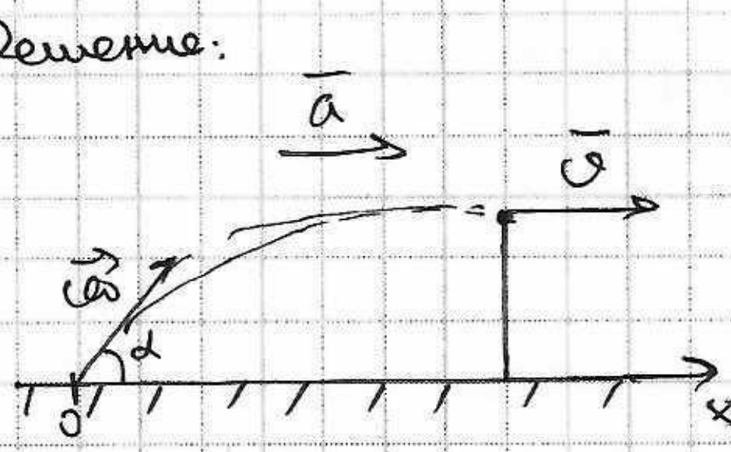
Вариант задания 2

№1

Дано:
$|\vec{v}| = |\vec{v}_0|$
$t = 0{,}8\,с$
$L = 6{,}4\,м$
$g = 10\,м/с^2$

$v_0 = ?$
$a = ?$

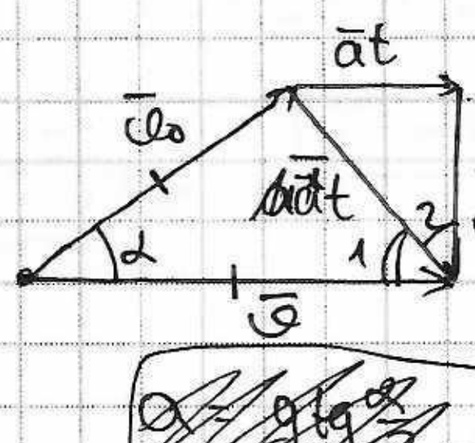
Решение:



1) Время п/уск. движ. на Ox:

$$v_0 t + \frac{at^2}{2} = L$$

2) Δ скоростей:



$|\vec{v_0}| = |\vec{v}| \Rightarrow \Delta$ равнобедренный

$\alpha + 2\beta = 180°$

$\beta = 90° - \frac{\alpha}{2}$

$\beta_1 = \beta_2 = \frac{\alpha}{2}$

$\alpha = g \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

$v_0 \sin\alpha = gt$

$v_0 = v_0 \cos\alpha + at$

3) отсюда получаем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{g}$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2 \quad \left| :\cos^2\frac{\alpha}{2} \right. \quad \left| \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \right. = \frac{}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1\right) = 2\frac{a}{g}\cdot\left(\frac{a^2}{g^2}+1\right)$$

$$\cos\alpha = \left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) = \frac{2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1} - 1 = \frac{2}{\frac{a^2}{g^2}+1} - 1 = \frac{2g^2}{a^2+g^2} - 1$$

4) $v_0 \cdot 2\frac{a}{g}\left(\frac{a^2}{g^2}+1\right) = gt$;

$2v_0 \frac{a}{g^2}(a^2+g^2) = g^2 t$;

$$v_0 = \frac{g^4 t}{2a(a^2+g^2)}$$ → в п. 1:

$$\frac{g^4 t}{2a(a^2+g^2)} \cdot \left(\frac{g^2-a^2}{a^2+g^2}\right) + \frac{at^2}{2} = L,$$

Можно использовать оборот листа для записи решений

3) Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} L = v_0 \cos\alpha \cdot t + \frac{at^2}{2}, & (1) \\ at = v_0(1-\cos\alpha), & (2) \\ v_0 \sin\alpha = gt. & (3) \end{cases}$$

(3): $\sin\alpha = \frac{gt}{v_0}$

(2)→(1):

$L = v_0 \cos\alpha \cdot t + \frac{t}{2} \cdot [v_0(1-\cos\alpha)]t;$

$L = v_0 t \cos\alpha + \frac{v_0 t}{2} - \frac{v_0 t \cos\alpha}{2} = \frac{v_0 t}{2}(1+\cos\alpha)$

$\frac{2L}{v_0 t} - 1 = \cos\alpha \;|^2$ (>0 для острых)

$\left(\frac{2L}{v_0 t} - 1\right)^2 = \cos^2\alpha$

$\left(\frac{2L}{v_0 t} - 1\right)^2 = 1 - \sin^2\alpha;$

$\frac{4L^2}{t^2 v_0^2} + 1 - \frac{4L}{t v_0} = 1 - \frac{g^2 t^2}{v_0^2} \;|\cdot v_0^2 t^2$ (ось. $v_0 \neq 0$)

$4L^2 - 4Lt v_0 = -g^2 t^4$

$4Lt v_0 = 4L^2 + g^2 t^4$

$v_0 = \frac{4L^2 + g^2 t^4}{4Lt} = \frac{L}{t} + \frac{g^2 t^3}{4L} = 10$ м/с

(2):

4) $\frac{at}{v_0} = 1 - \cos\alpha;$

$\cos\alpha = 1 - \frac{at}{v_0} \;|^2$

$1 - \sin^2\alpha = \left(1 - \frac{at}{v_0}\right)^2;$

$1 - \frac{g^2 t^2}{v_0^2} = 1 + \frac{a^2 t^2}{v_0^2} - \frac{2at}{v_0} \;|\cdot v_0^2$

$-g^2 t^2 = a^2 t^2 - 2at v_0;$

$a^2 t^2 - 2at v_0 + g^2 t^2 = 0$

$D_4 = v_0^2 t^2 - g^2 t^4 \geq 0 \quad \left(\begin{matrix}\sin\alpha \leq 1 \\ gt < v_0\end{matrix}\right)$

$a_{1,2} = \frac{v_0 t \pm \sqrt{v_0^2 t^2 - g^2 t^4}}{t^2}$

$a = \frac{v_0 t - \sqrt{v_0^2 t^2 - g^2 t^4}}{t^2} = 5$ м/с^2

Ответ: $v_0 = \frac{L}{t} + \frac{g^2 t^3}{4L} = 10$ м/с,

$a = \frac{v_0 t - \sqrt{v_0^2 t^2 - g^2 t^4}}{t^2} = 5$ м/с^2.

$\left(\begin{matrix}at = v_0(1-\cos\alpha) \\ \geq 0\end{matrix}\right)$

$\frac{at}{v_0} \leq 1; \quad \leq 1$

т.е. at должно быть $< v_0$, чему соотв. только знак (−)

olymp.bmstu.ru

№3

Дано:

$T_0 = 10$ Н

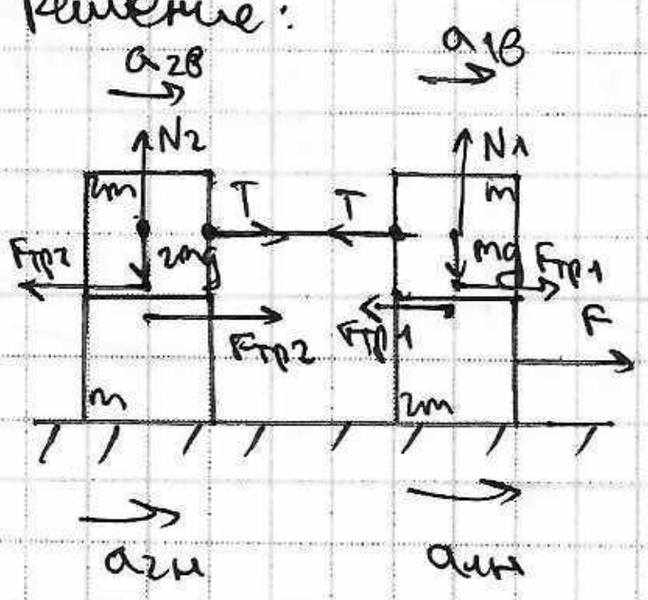
$\mu = 0{,}5$

$g = 10$ м/с^2

ц-к

t_0 - ?

Решение:



1) Расставим силы (рис.), действ. на тела:

II З.Н:

$F_{тр1} \le \mu mg$

$F_{тр2} \le 2\mu mg$

$a_{1н} = \frac{F - F_{тр1}}{2m}$

$a_{1в} = \frac{F_{тр1} - T}{m}$

$a_{2н} = \frac{F_{тр2}}{m}$

$a_{2в} = \frac{T - F_{тр2}}{2m}$

2) Усл. неразруш. конструкции:

$T \le T_0$, $a_{1н} = a_{1в} = a_{2н} = a_{2в}$

$\frac{F - F_{тр1}}{2m} = \frac{F_{тр1} - T}{m}$ | ·

$F - F_{тр1} = 2(F_{тр1} - T)$;

$F + 2T = 3F_{тр1}$

$\frac{F_{тр2}}{m} = \frac{T - F_{тр2}}{2m}$ | ·

$2F_{тр2} = T - F_{тр2}$;

$T = 3F_{тр2}$

отсюда

$F_{тр2} \le \frac{T_0}{3}$.

проверим, какое усл. более сильное

$\frac{T_0}{3} \vee 2\mu mg$;

$3{,}33$ Н $\lessdot$ 20 Н.

$\Rightarrow$ более сильное усл. $F_{тр2} \le \frac{T_0}{3}$

$F + 6F_{тр2} = 3F_{тр1}$

$F = 3F_{тр1} - 6F_{тр2} \le 0$

$3\mu mg \ge 2T_0$

$T_0, F_{max} = 3\mu mg$ и достиг.

при $F_{тр} = \mu mg$, $F_{тр2} = 0$

$F_{max} = 30$ Н

$a_{2в} = a_{1в}$ т:

$\frac{T - F_{тр2}}{2m} = \frac{F_{тр1} - T}{m}$ | ·

$T - F_{тр2} = 2F_{тр1} - 2T$;

$3T = 2F_{тр1} + F_{тр2}$; $F_{тр1} = 4F_{тр2}$; $F_{тр1} = 8F_{тр2}$;

то. $F_{тр1} \le \frac{4F_0}{3}$

проверим на более сильное ус.: $\mu mg \vee \frac{4F_0}{3}$,

$10 H \not< 13{,}3 H$.

более сильное

$F_{тр1} \le \mu mg$

то. $F_{тр2} \le \frac{\mu mg}{4}$.

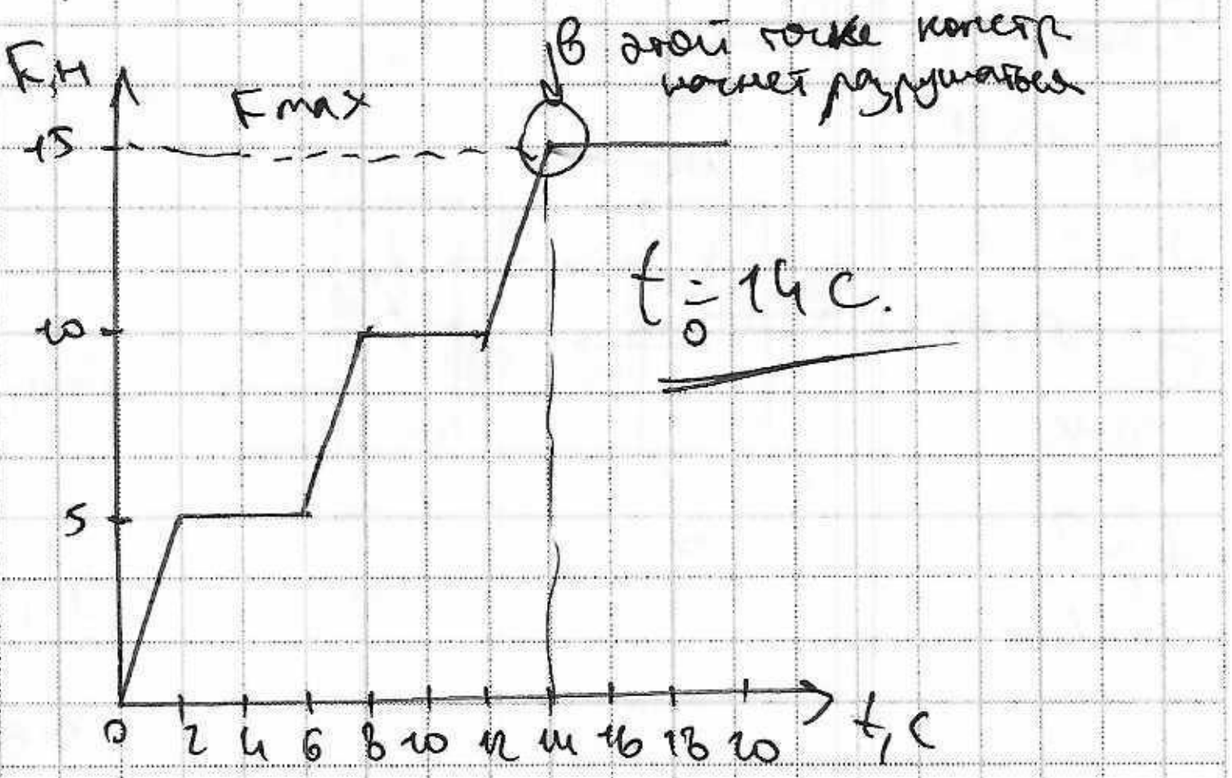
2) $F + 6F_{тр2} = 3F_{тр1}$,

$F + 6F_{тр2} = 12F_{тр2}$,

$F = 6F_{тр2}$, $F_{тр2} \le \frac{\mu mg}{4}$

то. $F \le \frac{3\mu mg}{2} = 15 H$.

3) График:



Ответ: $t_0 = 14$ с (из усл. $F \le \frac{3}{2}\mu mg = 15 H$)

№4

Дано:

N_e, $\Delta L = 5$ см $= 0{,}05$ м

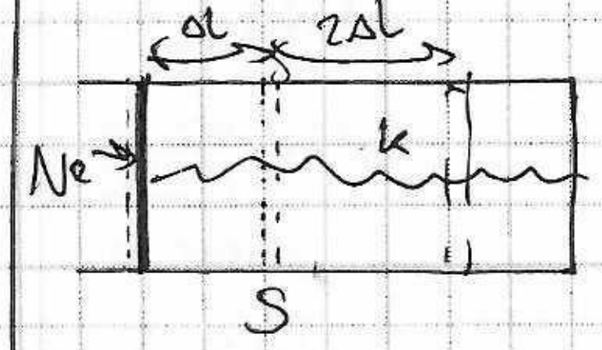
$2\Delta L = 0{,}1$ м

↑ доп.

$Q = 12000$ Дж

$A = ?$

Решение:



1) После установ. теплового равновесия пружина деф. на ΔL:

$p_1 S = k\Delta L$

причем $V_1 = \Delta L S$

Ур-ие Менд.-Кл.:

$p_1 V_1 = \nu R T_1 \to \nu R T_1 = \frac{k\Delta L}{S} \cdot \Delta L S = k\Delta L^2$

2) После нагрева:

I н. ТД: $Q = \Delta U + A$

$Q = \frac{3}{2}\nu R \Delta T + A$

одноат. газ

Ур-ие Менд-Кл.

$p_2 V_2 = \nu R T_2$, причем $p_2 S = \frac{3k\Delta L}{S}$

$V_2 = 3\Delta L S$

$\nu R T_2 = 9 k \Delta L^2$

$Q = \frac{3}{2}(\nu R T_2 - \nu R T_1) + A = \frac{3}{2} k\Delta L^2 (9 - 1) + A = 12 k \Delta L^2 + A$

ПРОД. 1 ← в конце работы (после прогревания)

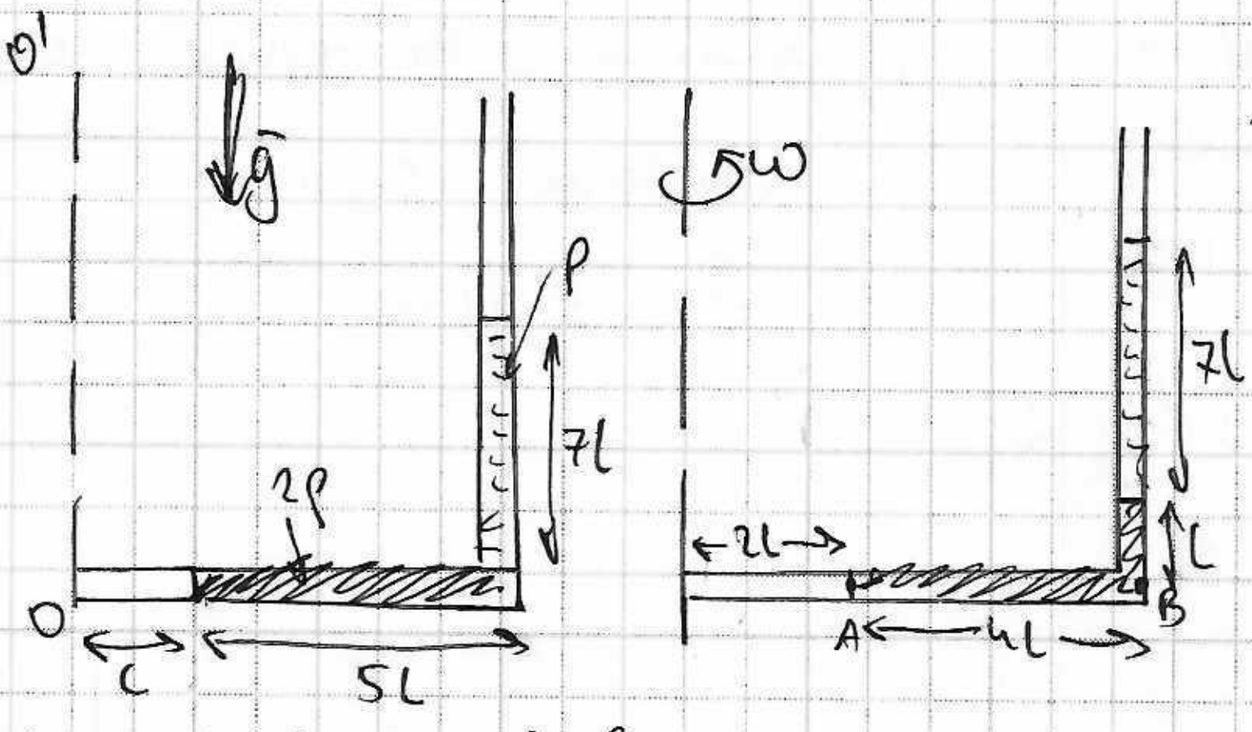
olymp.bmstu.ru

№5

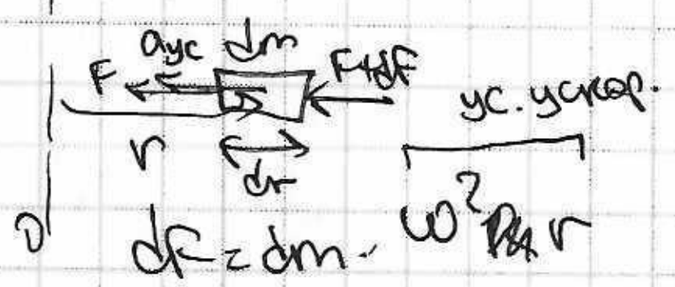
Дано: | Решение:

L, ρ

ω-?



1) Рассм. мал. кусочек ж-ти dm на расстоянии r от OO'



$dm = S dr \rho_ж$:

$dF = \omega^2 S \rho_ж dr \cdot r$

$dP = \omega^2 \rho_ж \cdot r dr$ |$\int$

$\Delta P_{21} = \omega^2 \rho_ж \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_{r_1}^{r_2}$

2) т.о. разность давл. в т. A и в т. B:

$P_B - P_a = \frac{\omega^2 \rho}{2} \cdot ((6L)^2 - (2L)^2) =$

$= \omega^2 \rho \cdot L^2 (36 - 4) = 32 \omega^2 \rho L^2$

3) В первом случае из ур-й гидростатики:

$P_1 = 7L \cdot \rho g$

из ур-ия Менд-ка:

$P_1 S \cdot L = \nu R T$

4) Во втором случае из ур-й гидростатики:
(газ тут не вносит вклада)

$P_B = P_1 7L \rho g + L \cdot 2\rho g$

$P_2 = P_A = 9 \rho g L - 32 \omega^2 \rho L^2$

из ур-ия Менд-ка:

$P_2 S \cdot 4L = \nu R T$ (темп. не мен.)

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{7 \rho g L}{9 \rho g L - 32 \omega^2 \rho L^2}$;

$18 \rho g L - 64 \omega^2 \rho L^2 = 7 \rho g L \rightarrow 64 \omega^2 \rho L^2 = 11 \rho g L$;

$\omega^2 = \sqrt{\frac{11g}{64L}}$

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{11g}{64L}}$

№6

Дано:

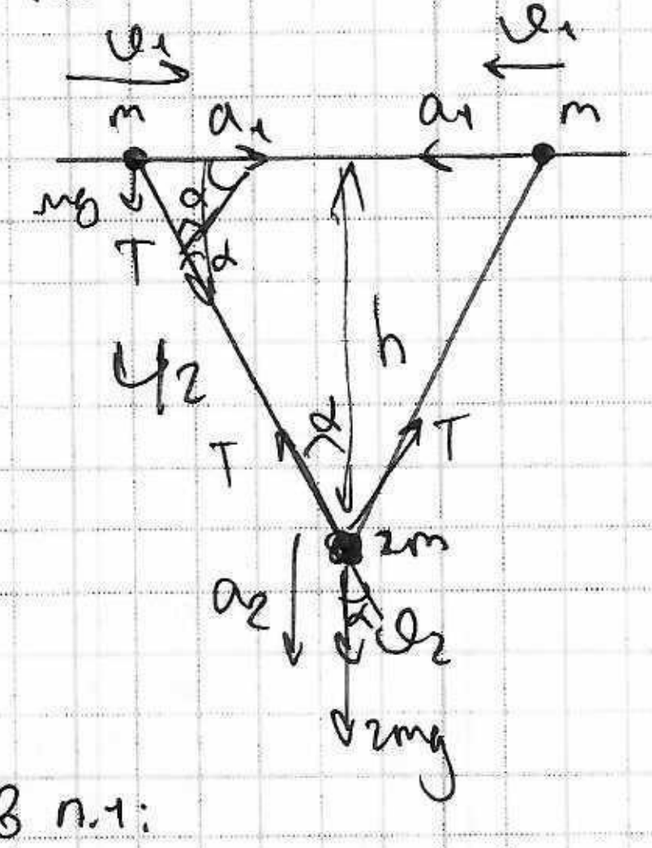
$L = 1{,}5$ м

$h = 0{,}45$ м

$m = 0{,}1$ кг

$T = ?$

Решение:



1) ЗСЭ:

$$2mgh = \frac{2mv_1^2}{2} + \frac{2mv_2^2}{2}$$

$$2gh = v_1^2 + v_2^2$$

2) кин. связь на перпенд. нити:

$$v_1 \sin\alpha = v_2 \cos\alpha$$

$$v_2 = v_1 \operatorname{tg}\alpha$$

подст. в п.1:

$$2gh = v_1^2 + v_1^2 \operatorname{tg}^2\alpha$$

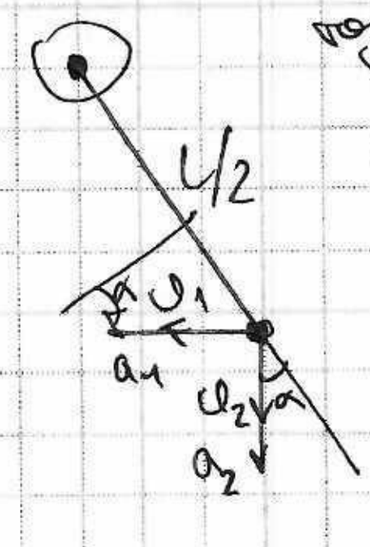
$$2gh = v_1^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha\right)$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$v_1^2 = 2gh \cdot \cos^2\alpha$$

$$\underline{v_1 = \cos\alpha \cdot \sqrt{2gh} \rightarrow v_2 = \sin\alpha \cdot \sqrt{2gh}}$$

3) перейдём в НИСО левого шарика:



тогда центр. будет двиг. по окр. радиуса $U/2$

$$a_{ус} = a_1 \sin\alpha - a_2 \cos\alpha$$

$$\frac{(v_1 \cos\alpha - v_2 \sin\alpha)^2}{U/2} = a_1 \sin\alpha - a_2 \cos\alpha;$$

$$\frac{2\left(\sqrt{2gh} \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\right)^2}{L} = a_1 \sin\alpha - a_2 \cos\alpha;$$

~~$a_1 \operatorname{tg}\alpha = \frac{8gh \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2}{\cos\alpha \cdot L} = a_2$~~

из II З.Н:

$$ma_1 = \frac{T \sin\alpha}{m}$$

$$2ma_2 = -2T\cos\alpha + 2mg$$

$$\underline{a_2 = g - \frac{T\cos\alpha}{m}}$$

З.П. $T' = \frac{T}{m}$:

$$\frac{8gh(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2}{\cos\alpha \cdot L} = T'\sin^2\alpha - g\cos\alpha + T'\cos^2\alpha$$

$$T' = g\cos\alpha + \frac{8gh}{L}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2$$

olymp.bmstu.ru

4) Условие:

$$\cos\alpha = \frac{h}{\frac{L}{2}} = \frac{2h}{L}$$

$$T' = g\cdot\frac{2h}{L} + \frac{8gh}{L}\left(2\cos^2\alpha - 1\right)^2 = \frac{2gh}{L} + \frac{8gh}{L}\left(\frac{8h^2}{L^2} - 1\right)^2 =$$

~~$= \frac{2gh}{L}\left(1 + 4\left(\frac{8h^2}{L^2} - 1\right)^2\right)$~~ $\frac{2ghm}{L}\left(1 + 4\left(\frac{8h^2}{L^2} - 1\right)^2\right) =$

~~$\rightarrow$~~ T

$$T = 0{,}79\ \text{Н}$$

Ответ: $T = \frac{2mgh}{L}\left(1 + 4\left(\frac{8h^2}{L^2} - 1\right)^2\right) = 0{,}79\ \text{Н}.$

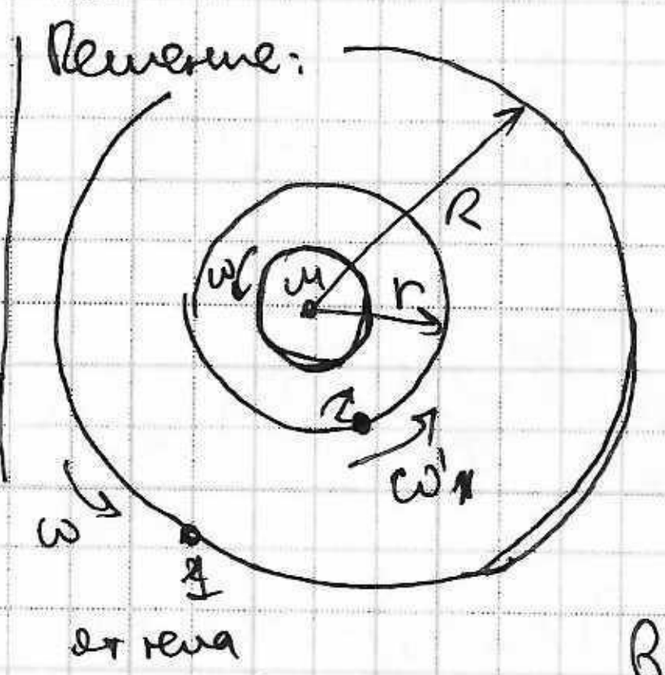
№2

Дано:

r, $T_п = 24\,ч$

$\omega_{min} = ?$

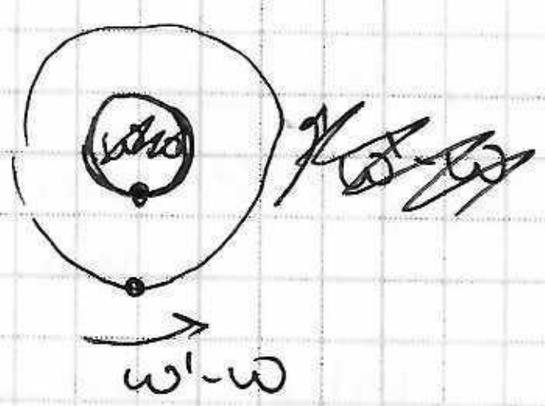
Решение:



1) Тк 1-й спутник движется по геостац. орбите, то его угловая скорость равна угл.скор. вращ. планеты ω

Тк 2-й спутник должен в сутки 2 раза пролетать над точкой планеты

В СО планеты:



$\omega' - \omega = \frac{4\pi}{T_п}$ заменим $\omega = \frac{2\pi}{T_п}$.

$\omega' = 3\omega$

подсчитаем одно на другое:

$$\frac{g}{\sim} = \frac{\frac{1}{r^3}}{\frac{1}{R^3}} = \frac{R^3}{r^3} \rightarrow R^3 = r^3 g \rightarrow$$

2) II З.Н. на ось к центру планеты:

① $m\cdot a_{цс} = G\frac{mM}{R^2}$

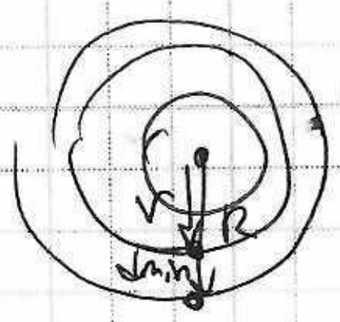
$\omega^2 R = G\frac{M}{R^2}$ |

$\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$

② $ma_{цс}' = G\frac{mM}{r^2}$

$(3\omega)^2 r = \frac{GM}{r^2} \rightarrow 9\omega^2 = \frac{GM}{r^3}$

3) Миним. расст. d_{min} будет достигаться, когда 2 спутника будут ~~как~~ ровно друг над другом:



$$d_{min} = R - r = r\sqrt[3]{g} - r = r(\sqrt[3]{g} - 1) =$$

$$= 1{,}08\,r$$

Ответ: $d_{min} = r(\sqrt[3]{g} - 1) = 1{,}08\,r$.

№7

Дано:

$V = 1$ л

$m_0(O_2) = 0{,}72$ г

$T_0 = 293$ К

$\alpha = 0{,}2$

$C_1 = 1000 \frac{Дж}{кг \cdot К}$

$C_2 = 1200 \frac{Дж}{кг \cdot К}$

$T_2 = 2300$ К

$E_g = 495000 \frac{Дж}{моль}$

$m' = \frac{m_0}{2}$

1) $m(Al) = ?$

2) $p_{max} = ?$

Решение:

1) $4Al + 3O_2 \to 2Al_2O_3$

$\nu(Al)$ $\nu(O_2)$

$\nu = \frac{m}{M} \Rightarrow \nu(O_2) = \frac{m_0/2}{M(O_2)} = \frac{m_0}{2M(O_2)}$

($m_0/2$ — т.к. должна остаться 1/2 кислор., по прореаг. тоже только 1/2)

$\frac{\nu(Al)}{\nu(O_2)} = \frac{4}{3} \Rightarrow \nu(Al) = \frac{m(Al)}{M(Al)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{m_0}{2M(O_2)}$

$$m(Al) = \frac{4}{6} m_0 \cdot \frac{M(Al)}{M(O_2)} = 0{,}405\,г.$$

2) УТБ: (ЗСЭ)

$$m_2 C_2 (T_к - T_2) + \nu_g E_g + m_{ост} C_1 (T_к - T_0) = 0$$

$\nu_g = 2/3\,\nu(O_2)$ ← из р-ии

$m_2 = m(Al_2O_3) = \nu(Al_2O_3) \cdot M(Al_2O_3) = \frac{2}{3}\nu(O_2) M(Al_2O_3)$

$m_{ост} = m_0 - m_{сгор} = m_0 - \nu(O_2) \cdot M(O_2)$

$\nu_g = \frac{\alpha m_{ост}}{M(O)}$

Из ур-ия Менд.-Кл.:

- $pV = \nu_{ост} R T_к$;

(ν ост — образовался продуктов реакции, т.к. $T_к \to T_{max}$ давление)

Видно, что p_{max} достигается при $T_к \to T_{max}$

т.о. $m_2 C_2 T_к - m_2 C_2 T_2 + \nu_g E_g + m_{ост} C_1 T_к - m_{ост} C_1 T_0 = 0$;

$$T_к (m_2 C_2 + m_{ост} C_1) = m_{ост} C_1 T_0 + m_2 C_2 T_2 - \nu_g E_g$$

$$T_к = \frac{(m_0 - \nu(O_2) M(O_2)) C_1 T_0 + \frac{2}{3}\nu(O_2) M(Al_2O_3) C_2 T_2 - \frac{\alpha m_{ост}}{M(O)} E_g}{m_2 C_2 + m_{ост} C_1}$$

olymp.bmstu.ru

3) ~~Записать, что в условии задачи~~ обозначим $\nu(O_2)$ как ν, чтобы меньше писать

$$T_к = \frac{(m_0 - \nu M_2)C_1T_0 + \frac{2}{3}\nu M_3 C_2 T_г - \frac{\alpha}{m_0}(m_0 - \nu M_2)E_g}{\frac{2}{3}\nu M_3 C_2 + (m_0 - \nu M_2)C_1}$$

Если посчитать численно (я не могу брать производную)
(в разм. Г, К, моль)

$$T_к = \frac{(0{,}72 - 32\nu)\cdot 1\cdot 293 + 1876800\nu - 61875(0{,}72 - 32\nu)}{81{,}6\nu + (0{,}72 - 32\nu)\cdot 1} =$$

$= \frac{+19596\nu + \text{const}}{49{,}6\nu + \text{const}}$ Воспользуемся TABLE на калькуляторе и найдём максимум

т.о. видно, что $T_к \to \max$ при $\nu \to \max$

ν ограничено сверху $\frac{m_0}{M_2}$ (т.к. не может стореть больше кислорода, чем есть).

В таком случае (в пределе, когда почти весь кислород)

$T_к = T_к\left(\frac{m_0}{M_2}\right) = 2300$ К

$$P_к = \frac{\nu RT_к}{V}\left(\frac{m_0}{M_2} - \nu\right)$$

$\nu' \approx 0{,}0164$ моль;

подставим $P_{к\,max} = \frac{50691\ \text{Па}}{\text{К}} \cdot T_к = 7195{,}6$ кПа (?) $\to 141{,}95$ К

$= 63712$ Па

Ответ: $m(Al) = \frac{4}{3}\nu m_0 \cdot \frac{M(Al)}{M(O_2)} = 0{,}405$ г,

$P_{max} \approx 63712$ Па

ГРОД. 1

(продолжение задачи №4)

3) Запишем теперь работу газа как изменение потенц. энергии пружины:

$$A = W_{упр.кон} - W_{упр.нач} = \frac{k(3\Delta l)^2}{2} - \frac{k\Delta l^2}{2} =$$

$$= \frac{9k\Delta l^2}{2} - \frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{8k\Delta l^2}{2} = 4k\Delta l^2$$

подставим в п.2. ($Q = 12k\Delta l^2 + A$)

$$Q = 16k\Delta l^2 \Rightarrow k\Delta l^2 = \frac{Q}{16} \Rightarrow Q = \frac{12}{16}Q + A;$$

$$\underline{A = \frac{4}{16}Q = \frac{Q}{4} = 3000\ Дж.}$$

Ответ: $A = \frac{Q}{4} = 3\ кДж$